MATRIKS DAN TRANSFORMASI LINIER
RUANG EIGEN

INSTITUT BISNIS & INFORMATIKA stikom SURABAYA

S1 Sistem Komputer
STIKOM Surabaya
Oleh Musayyanah,S.ST, MT

TUJUAN

- Mahasiswa dapat memahami pengertian nilai dan vector eigen
- Mahasiswa dapat menetukan nilai eigen suatu matriks

DEFINISI

$$AX = \lambda X$$

Dengan :

$\lambda =$ skalar atau Eigen Value atau nilai Eigen ; $\lambda \in$ R

X $=$ Vektor Eigen yang bersesuaian dengan λ

A $=$ Matriks bujur sangkar orde n x n

CONTOH

$Sebuah\ vector\ X = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}\ dan\ matriks\ A\ atau\ bujur\ sangkar\ orde\ 2x2$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Berapakah nilai λ ?

Penyelesaian :

Jika matriks A dikalikan dengan X maka :

AX = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 24 \\ 24 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \lambda$ X

Maka konstantan $\lambda\ = 6$ dikatakan nilai eigen dari matriks bujur sangkar A.

MENGHITUNG NILAI EIGEN (EIGEN VALUE)

$$IAX = I\lambda X$$

$$AX = \lambda IX$$

$$[\lambda I - A]X = 0$$

Persamaan di atas terpenuhi jika dan hanya jika :

$$\det[\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}] = 0$$

CONTOH

Tentukan besarnya nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Substitusikan ke dalam persamaan det $[\lambda I - A]$ = 0

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

(λ-1)(λ-1)-6 =0

$\lambda^2 - 2\lambda$ – 5 = 0 → a = 1, b = -2 , c =-5

Menggunakan rumus abc atau pemfaktoran

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

maka penyelesaian nilai eigen matriks A :

$$\lambda_1 = \frac{2 + 2\sqrt{6}}{2} \, dan \;\; \lambda_2 = \frac{2 + 2\sqrt{6}}{2}$$

MENGHITUNG VECTOR EIGEN (EIGENVECTOR)

$$\textit{Kita}\ \text{tinjau sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 berikur :}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\textit{Persamaan}\ \mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}\ \text{dapat dituliskan}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Persamaan di atas dikalikan dengan identitas (I),}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} -- > \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11}x_1 + \mathrm{a}_{12}x_2 \\ \mathrm{a}_{21}x_1 + \mathrm{a}_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 & 0 \\ 0 & \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} - \lambda & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan sebelumnya dalam bentuk persamaan linier dituliskan sebagai brkt

$$(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0$$

CONTOH

Tentukan besarnya nilai eigen dan vector eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Langkah awal adalah substitusi ke dalam persamaan det $[\lambda I \ - A] = 0$

$$\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} - - > \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$maka\ \lambda_1 = 1\,\mathrm{dan}\ \lambda_2 = 2$$

Selanjutnya Vector Eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

didapatkan dari persamaan :

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0$$

$$(3 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-1x_1 + (0 - \lambda)x_2 = 0$$

Sehingga untuk $\lambda = 1$:

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-1x_1 + -1x_2 = 0$$

$x_1 = -x_2$, jika $x_1 = r$ maka $x_2 = -r$

Vector eigen dengan $\lambda = 1$ adalah

$$X = \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$$

dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Vector eigen dengan $\lambda = 2$ adalah

$x_1 + 2x_2 = 0$

$- x_1 - 2x_2 = 0$

kedua persamaan di atas dapat dieliminasi,

sehingga :

$x_1 = -2x_2$

misalkan $x_1 = r$ maka $x_2 = -\frac{1}{2} r$

maka vector eigen $\lambda = 2$ adalah

$$X = \begin{bmatrix} r \\ -\frac{1}{2} r \end{bmatrix}$$

.

MAKE A TEAM

Buatlah kelompok, dimana satu kelompok terdiri dari 4 orang

Pilihlah satu kata

1. **Sinyal : Akbar , tamam, hesnod , insan**
2. **Isyarat : Rizky , Adhi,Tara, Dhimas**
3. **Vector : anan, sukus, fernanduz, helmi**
4. **Matriks kolom : yanuar, agung , freean**
5. **Homogen : abil , wiwik, Revidho, Ferry**
6. **Non Homogen : Habib , arga, maulana, Rezza**
7. **Persamaan Linier : Iqbal , Faris , zainal, Abimas**
8. **Persamaan Kuadrat : fahmi , Vicky , Shandy, Setiayawan**

TUGAS

1. Sebuah vector $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $dan\ matriks\ A\ atau\ bujur\ sangkar\ dengan\ orde\ 2x2;$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. Berapakah\ nilai\ \lambda$?

2. Tentukan besarnya nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. Tentukan besarnya nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

4. Tentukan besarnya vector eigen dari matrisk A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, jika diketahui nilai

eigen yaitu = 2

Pretest

Apakah vector ini u1 = (-2,2,0) u2 = (0,-2,2) u3 = (2,0,-2) merupakan vector orthogonal dan orthonormal, jika bukan orthonormal gunakan metode Gramschmidt untuk menyelesaikannya (Sinyal , Persamaan Kuadrat)

Apakah vector ini u1 = (-2,1,0) u2 = (0,-1,2) u3 = (2,0,-2) merupakan vector orthogonal dan orthonormal, jika bukan orthonormal gunakan metode Gramschmidt untuk menyelesaikannya (Isyarat, Homogen)

Apakah vector ini u1 = (-1,1,0) u2 = (0,-0,1) u3 = (3,0,-2) merupakan vector orthogonal dan orthonormal, jika bukan orthonormal gunakan metode Gramschmidt untuk menyelesaikannya (Vector, Non Homogen)

Apakah vector ini u1 = (-1,1,0) u2 = (0,3,2) u3 = (-1,0,-3) merupakan vector orthogonal dan orthonormal, jika bukan orthonormal gunakan metode Gramschmidt untuk menyelesaikannya (MatriksKolom, Persamaan Linier)