INSTITUT BISNIS
DAN INFORMATIKA
stikom
SURABAYA
HEART & MIND TOWARDS EXCELLENCE

VEKTOR

Oleh : Musayyanah, S.ST, MT

2.1 BESARAN SKALAR DAN VEKTOR

Sifat besaran fisis :
- Skalar
- Vektor

➢ Besaran Skalar

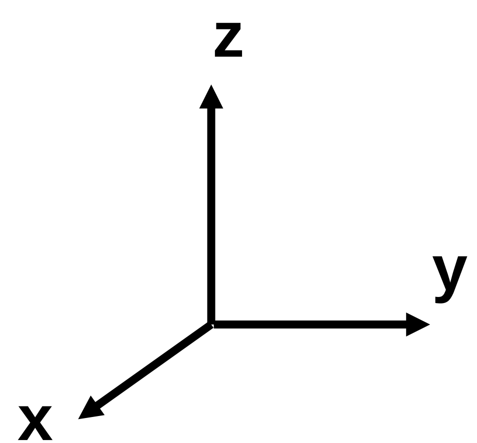
Besaran yang cukup dinyatakan oleh besarnya saja (besar dinyatakan oleh bilangan dan satuan).

Contoh : waktu, suhu, volume, laju, energi
Catatan : skalar tidak tergantung sistem koordinat

➢ Besaran Vektor

Besaran yang dicirikan oleh besar dan arah.

Contoh : kecepatan, percepatan, gaya
Catatan : vektor tergantung sistem koordinat



2.2 PENGGAMBARAN DAN PENULISAN (NOTASI) VEKTOR

Gambar :

P ──────────▶ Q

Titik P : **Titik pangkal vektor**

Titik Q : **Ujung vektor**

Tanda panah : **Arah vektor**

Panjang PQ = |PQ| : **Besarnya (panjang) vektor**

Besar vektor A = A = |A|

(pakai tanda mutlak)

Notasi Vektor

$\mathbf{A}$ ⟶ Huruf tebal

$\vec{A}$ ⟶ Pakai tanda panah di atas

A ⟶ Huruf miring

Catatan :

Untuk selanjutnya notasi vektor yang digunakan huruf tebal

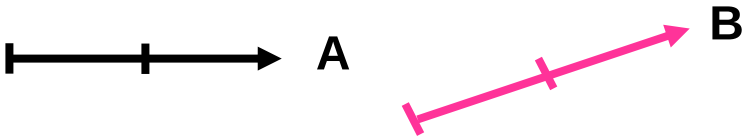
Catatan :

a. Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama

A = B

b. Dua vektor dikatakan tidak sama jika :

1. Besar sama, arah berbeda

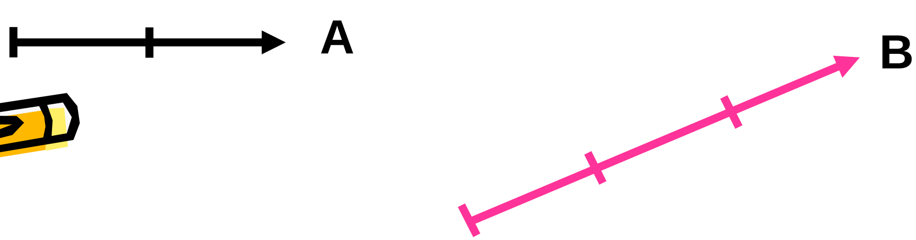


$A \neq B$

2. Besar tidak sama, arah sama

$A \neq B$

3. Besar dan arahnya berbeda



$A \neq B$

2.3 OPERASI MATEMATIK VEKTOR

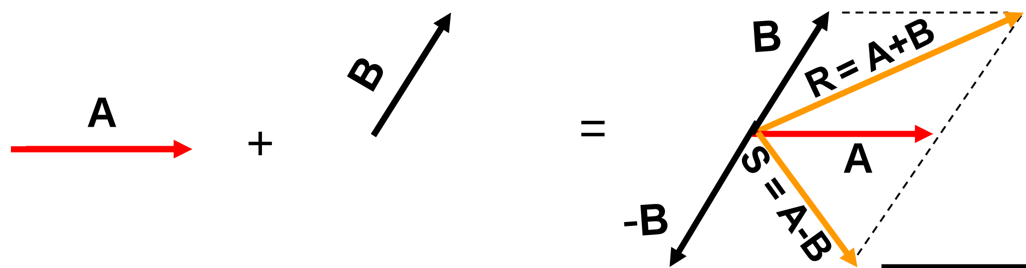
1. Operasi jumlah dan selisih vektor
2. Operasi kali

2.3.1 JUMLAH DAN SELISIH VEKTOR

Metode:

1. Jajaran Genjang
2. Segitiga
3. Poligon
4. Uraian

1. Jajaran Genjang



$$\boxed{R = A + B}$$

Besarnya vektor R = | R | = $\boxed{\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$

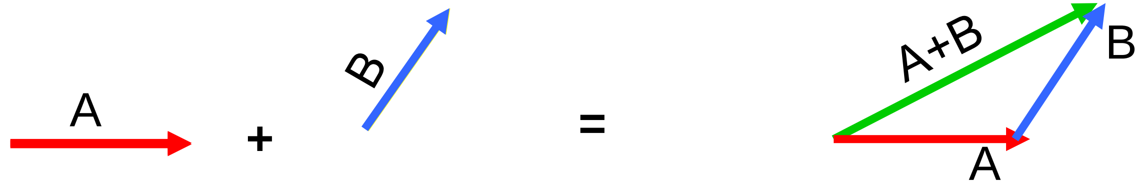
Besarnya vektor A+B = R = |R| = $\sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\theta}$

Besarnya vektor A-B = S = |S| = $\sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\theta}$

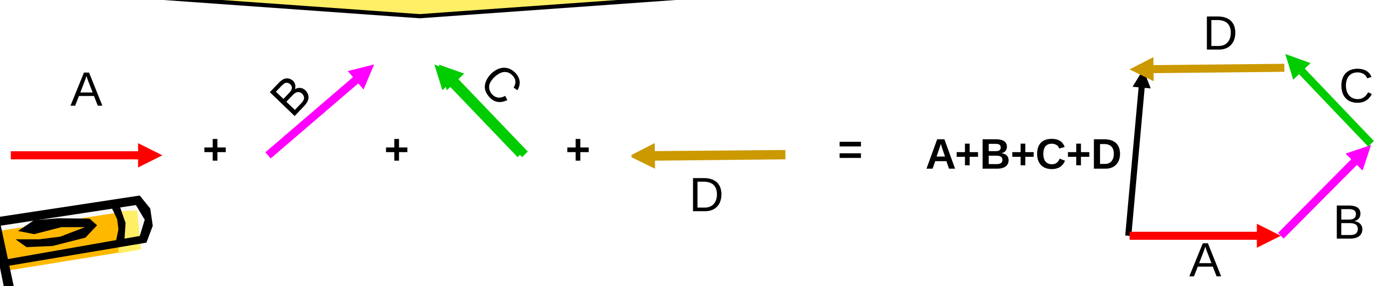
- Jika vektor A dan B searah → $\theta = 0^o$: R = A + B
- Jika vektor A dan B berlawanan arah → $\theta = 180^o$: R = A - B
- Jika vektor A dan B Saling tegak lurus → $\theta = 90^o$: R = 0

Catatan : Untuk Selisih (-) arah Vektor di balik

2. Segitiga



3. Poligon (Segi Banyak)



Sifat-Sifat Vector

- Asosiatif
- $(A+B) + C = A + (B+C)$
- Distributif
- $(a+b).A = a.A + b.B$
- Penjumlahan dengan Nol
- $A + 0 = 0 + A = A$
- Komutatif
- $A + B = B + A$
- Penjumlahn dengan inversnya
- $B + (-B) = 0 = (-B) + B$

Norma Vector

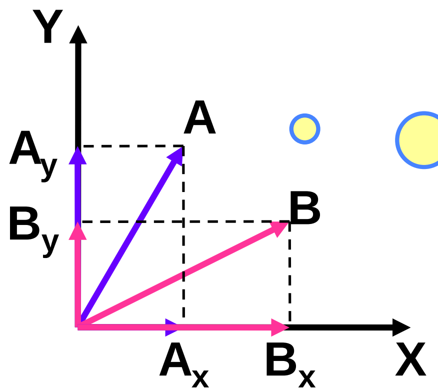
- Jika diketahui : u = (u_1, u_2) dan v = (v_1, v_2, v_3)
- Dimensi dua : $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- Dimensi tiga : $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Contoh Soal

- A = (2,4, -5) , B = (1,2,6), dan C = (3,5)
- A – B?
- B – C ?
- A- C ?
- $\|A\|$, $\|B\|$, dan $\|C\|$

4. Uraian

Vektor diuraikan atas komponen-komponennya (sumbu x dan sumbu y)



$\mathbf{A} = A_x.i + A_y.j$; $\mathbf{B} = B_x.i + B_y.j$

$A_x = \mathbf{A} \cos\theta$; $B_x = \mathbf{B} \cos\theta$

$A_y = \mathbf{A} \sin\theta$; $B_y = \mathbf{B} \sin\theta$

Besar vektor A + B = |A+B| = |R|

$R_x = A_x + B_x$

$R_y = A_y + B_y$

$$|R| = |A + B| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$

Arah Vektor R (terhadap sb.x positif) = $\text{tg}\,\theta = \dfrac{R_y}{R_x}$

$$\theta = \text{arc tg}\ \frac{R_y}{R_x}$$

2.3.2 PERKALIAN VEKTOR

1. Perkalian Skalar dengan Vektor
2. Perkalian vektor dengan Vektor
   a. Perkalian Titik (Dot Product)

   b. Perkalian Silang (Cross Product)

1. Perkalian Skalar dengan Vektor ⇒ **Hasilnya vektor**

$$\boxed{\mathbf{C} = k\,\mathbf{A}}$$

k **:** Skalar
A **:** Vektor

Vektor **C** merupakan hasil perkalian antara skalar k dengan vektor A

Catatan :

- Jika k positif arah **C** searah dengan **A**
- Jika k negatif arah **C** berlawanan dengan **A**

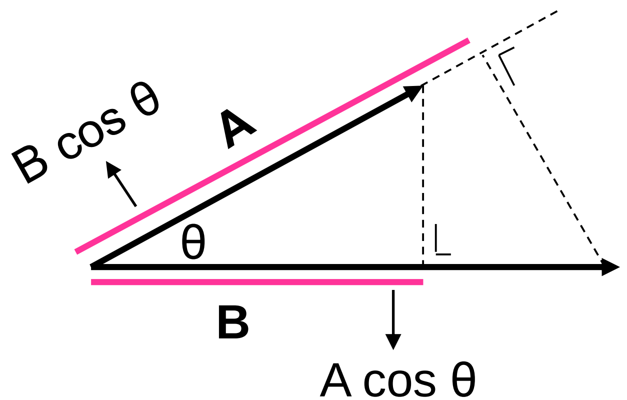
k = 3,

2. Perkalian Vektor dengan Vektor

a. Perkalian Titik (Dot Product) ⇒ Hasilnya skalar

$$\boxed{\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} \quad = \mathbf{C}}$$

C **=** skalar



Besarnya : C = |A||B| Cos θ

A = |A| = besar vektor **A**

B = |B| = besar vektor **B**

θ= sudut antara vektor **A** dan **B**

$\theta \in [\mathbf{0}°, \mathbf{180}°]$

A • B > 0 , jika $0° \le \theta \le 90°$
A • B = 0, jika $\theta = 90°$
A • B < 0, jika $90° \le \theta \le 180°$

Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product)

1. **Komutatif : $\mathbf{A \bullet B = B \bullet A}$**
2. **Distributif : $\mathbf{A \bullet (B+C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)}$**

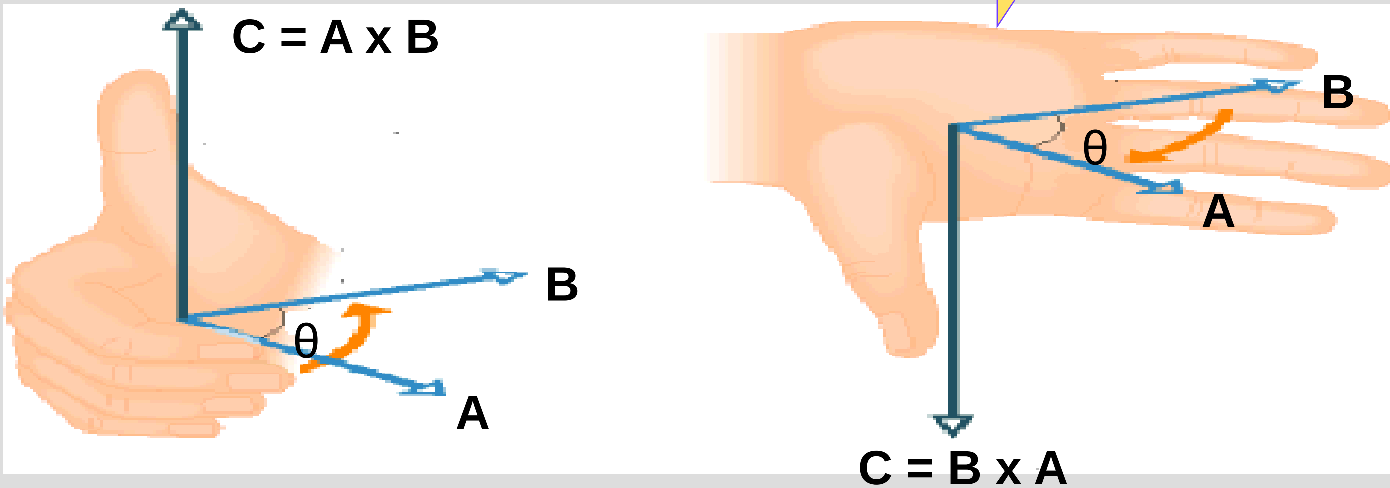
Catatan :

1. Jika A dan B saling tegak lurus → $\mathbf{A \bullet B} = 0$
2. Jika A dan B searah → $\mathbf{A \bullet B} = A \bullet B$
3. Jika A dan B berlawanan arah → $\mathbf{A \bullet B} = -A \bullet B$

Contoh Soal

- Jika diketahui vector-vector sebagai berikut, maka tentukan **A • B**
- **A (4, -4, -2) , B (8,-8,4) dan** $\theta = 60°$
- **A (3, 2, 1) dan B (2,3,4)**
- **A (4, -4, -2), B (8,-8,4) dan** $\theta = 90°$

b. Perkalian Silang (Cross Product) ⇒ Hasilnya vektor



Catatan :

Arah vektor C sesuai aturan tangan kanan

Besarnya vektor C = A x B = A B sin θ

Sifat-sifat :

1. Tidak komunikatif ➔ A x B ≠ B x A
2. Jika A dan B saling tegak lurus ➔ A x B = B x A
3. Jika A dan B searah atau berlawan arah ➔ A x B = 0

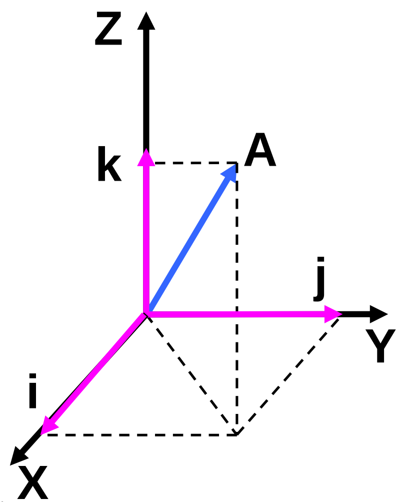
2.4 VEKTOR SATUAN

Vektor yang besarnya satu satuan

Notasi $\hat{A} = \dfrac{\overline{A}}{\left|A\right|}$

$\hat{A} = \left|\hat{A}\right| = \dfrac{\left|\overline{A}\right|}{\left|A\right|} = 1$ Besar Vektor

Dalam koordinat Cartesian (koordinat tegak)



Arah sumbu x : $\hat{i}$

Arah sumbu y : $\hat{j}$

Arah sumbu z : $\hat{k}$

$$\overline{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

➢ Sifat-sifat Perkalian Titik (Dot Product) Vektor Satuan

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{i} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \bullet \mathbf{j} = \mathbf{j} \bullet \mathbf{k} = \mathbf{k} \bullet \mathbf{i} = 0$$

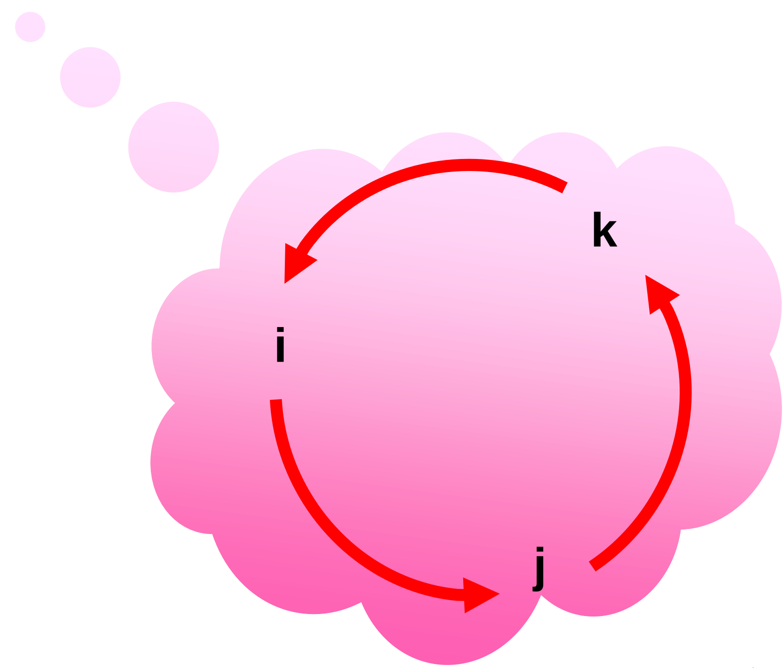
➢ Sifat-sifat Perkalian silang (Cross Product) Vektor Satuan

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k$$

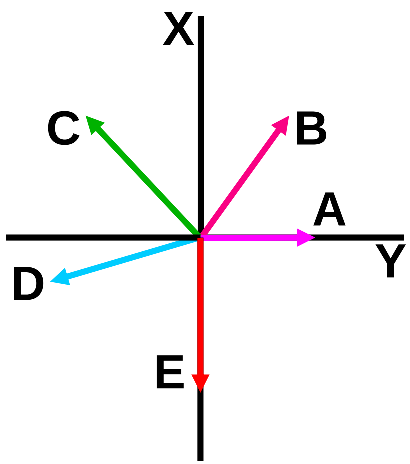
$$j \times k = i$$

$$k \times i = j$$



Contoh Soal

1. Lima buah vektor digambarkan sebagai berikut :



Besar dan arah vektor pada gambar di samping :

Vektor	Besar (m)	Arah (º)
A	19	0
B	15	45
C	16	135
D	11	207
E	22	270

Hitung : Besar dan arah vektor resultan.

Jawab :

Vektor	Besar (m)	Arah(⁰)	Komponen X(m)	Komponen Y (m)
A	19	0	19	0
B	15	45	10.6	10.6
C	16	135	-11.3	11.3
D	11	207	-9.8	-5
E	22	270	0	-22
			$R_X = 8.5$	$R_Y = -5.1$

Besar vektor R : $R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2} = \sqrt{8.5^2 + (-5.1)^2} = \sqrt{94.01} = 9.67$ m

Arah vektor R terhadap sumbu x positif :

$\text{tg}\,\theta = \dfrac{-5.1}{8.5} = -0{,}6$

$\theta = 329.03^0$ (terhadap x berlawanan arah jarum jam)

Hasil Kali Silang (Cross Silang)

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2), -(u_1 v_3 - u_3 v_1), (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Contoh

- u = (1, 3, -1) dan v = (2, -1, 1)

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$u \times v = (2, -3, -7)$$

2. Diketahui koordinat titik A adalah (2, -3, 4). Tuliskan dalam bentuk vektor dan berapa besar vektornya ?

Jawab :

Vektor $A = 2i - 3j + 4k$

$$A = |A| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} \text{ satuan}$$

3. Tentukanlah hasil perkalian titik dan perkalian silang dari dua buah vektor berikut ini :

$A = 2i - 2j + 4k$

$B = i - 3j + 2k$

Jawab :

Perkalian titik :

$A \cdot B = 2.1 + (-2)(-3) + 4.2$

$= 16$

Perkalian silang :

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \{(-2).2 - 4.(-3)\}\, i - \{2.2 - 4.1\}\, j + \{2.(-3) - (-2).1\}\, k$

$= (-4+12)\, i - (4-4)\, j + (-6+4)\, k$

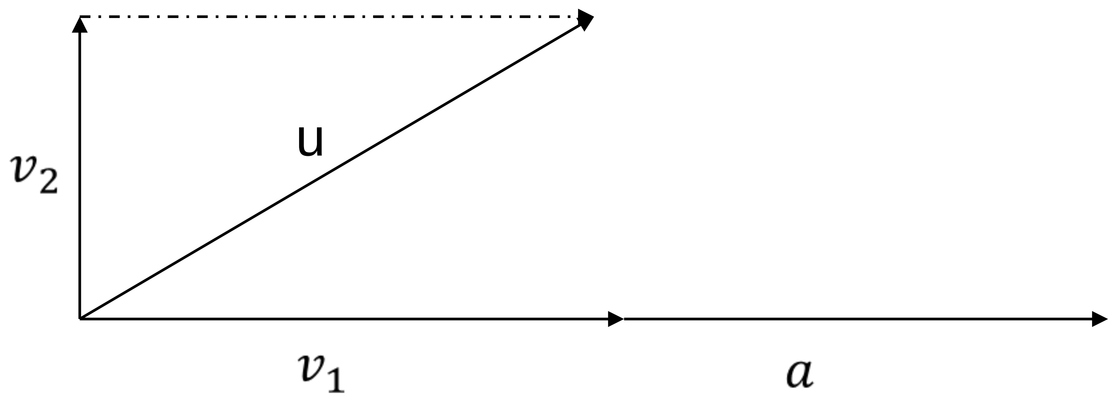
$= 8i - 0j - 2j$

$= 8i - 2k$

Jarak antar vector

- Diketahui P = (u1,u2,u3) dan Q = (v1,v2,v3).
- $\mathrm{d(PQ)} = \sqrt{(v1 - u1)^2 + (v2 - u2)^2 + (v3 - u3)^2}$
- Disebut juga norma vector (PQ)

Proyeksi Orthogonal



$$proj_a u = \frac{u.a}{\|a\|^2}\, a$$

$$Komp_a u = u - proj_a u = u - \frac{u.a}{\|a\|^2}\, a$$

Contoh Soal

- Diketahui u = (4,-2,3) dan a = (4,-2,2). Tentukan
- A. projeksi orthogonal dari u pada a
- B. komponen vector u yang orthogonal terhadap a

Penyelesaian

- u.a = 26
- $\|a\|^2$ = 24
- Projeksi orthogonal dari u pada a

$$proj_a u = \frac{u.a}{\|a\|^2}\, a$$

- $proj_a u$ = $\frac{26}{24}\,(4,-2,2) = \frac{26}{6}, \frac{-26}{12}, \frac{26}{12}$
- Komponen vector u yang orthogonal terhadap a

$$Komp_a u = u \; - proj_a u = u \; - \frac{u.a}{\|a\|^2}\, a = (4,-2,3\,) - (\,\frac{26}{6}, \frac{-26}{12}, \frac{26}{12}) = \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$$