Sistem Persamaan LINIER (1)

Oleh :
Musayyanah, S.ST, M.T

Tujuan

- Menjelaskan pengertian persamaan linear
- Memahami jenis-jenis penyelesaian sistem persamaan linier
- Menyelesaikan SPL dengan 2 jenis persamaan dan variabel
- Menyelesaikan SPL dengan n persamaan dan n variabel dengan menggunakan Metode Matriks, Metode Cramer dan Metode TBE
- Menyelesaikan SPL yang jumlah persamaanya tidak sama dengan jumlah variabelnya

A. Pengertian SPL

- Bentuk umum :

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1}\\
&\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{11}x_1 = b_2}\\
&.\\
&.\\
&.\\
&\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{b_i = 0}$ Sistem persamaan linear **homogen**

$\boldsymbol{b_i \neq 0}$ Sistem persamaan linear **non homogen**

Dengan a_{ij} $dan b_j$ $merupakan\ konstanta, dimana\ i = 1,2, \ldots, m\ dan\ j = 1,2, \ldots n\ sedangkan\ x_1, x_2, ..x_n$ merupakan variabel yang tidak diketahui (variabel yang dicari)

Ada 2 kemungkinan yang dapat dijumpai pada persamaan, yaitu :

1. **m = n** (jumlahnya persamaan dan jumlahnya variabel sama)
2. **m**$\neq \boldsymbol{n}$ $(jumlah\ persamaan\ dan\ jumlahnya\ variabel\ tidak\ sama)$

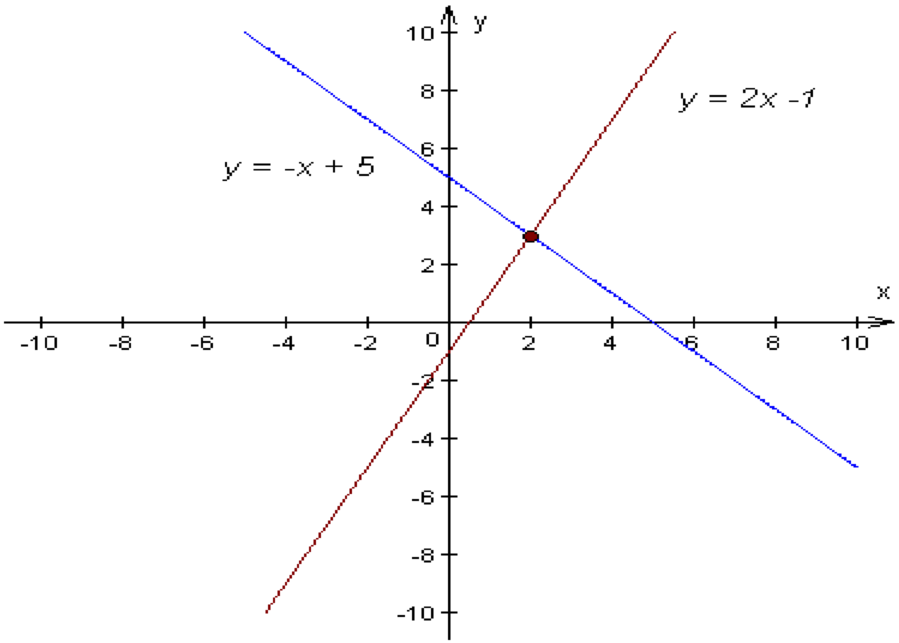
B. Jenis-Jenis Penyelesaian SPL

A. Penyelesaian Konsisten

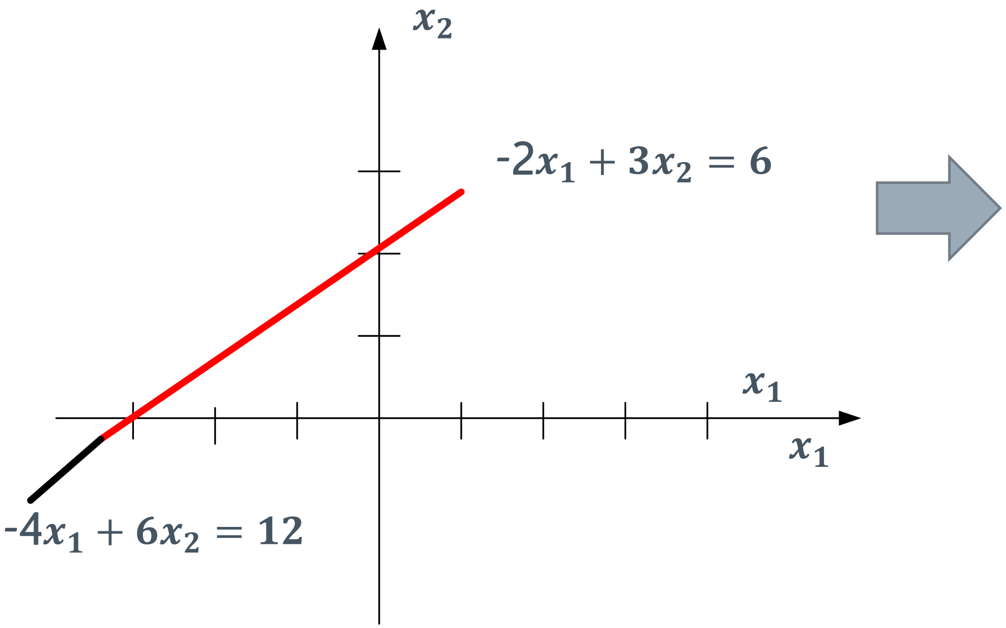
mempunyai penyelesaian

1. Penyelesaian Tunggal

$$y = 2x - 1$$
$$y = -x + 5$$



2. Penyelesaian Tak Berhingga

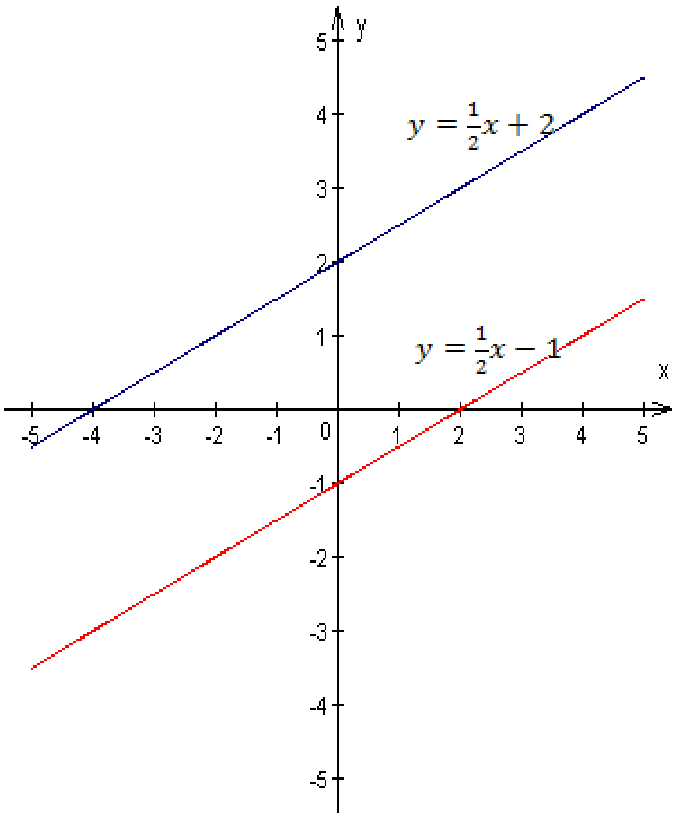


Garis lurus saling berhimpitan

x_1	0	1	2	3	...	....
x_2	2	2.667	3.333	4	....	....

B. Penyelesaian Tidak Konsisten (Inkonsisten)

Tidak mempunyai penyelesaian



2 garis yang sejajar sehingga tidak terjadi perpotongan

C. SPL dengan 2 Persamaan dan 2 Variabel

- Bentuk Umum
- $a_1 x + b_1 y = c_1$
- $a_2 x + b_2 y = c_2$

Ket : x dan y adalah variabel

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$$

Metode menyelesaikan SPL 2 variabel

› A. Metode Eliminasi

› B. Metode Subtitusi

› C. Metode Grafik

› D. **Metode Matriks**

$$a_1x + b_1y = b_1$$
$$a_2x + b_2y = b_2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{B}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\mathrm{B}$$

Contoh

- Hesnod dan teman-temannya memesan 3 mangkok bakso dan 2 gelas es jeruk di kantin STIKOM. Tak lama kemudian, datang Arga dan teman-temanya memesan 5 mangkok bakso dan 3 gelas es jeruk. Hesnod menantang Arga untuk memakan harga bakso permangkok dan harga es jeruk per gelas jika Hesnod harus membayar Rp 7000 untuk semua pesanannya itu dan Arga harus membayar Rp 11.500 untuk semua pemesanan itu . Maka berapakah harga bakso permangkok dan es jeruk per gelasnya ?

- Misalkan x : harga bakso per mangkok
- y : Harga es jeruk per gelas
- SPL : 3x + 2y = 7000

  5x + 3y = 11500

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7000 \\ 11500 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\mathrm{B}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(3)(3)-(5)(2)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7000 \\ 11500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Menyelesaikan SPL n Persamaan dan n variabel

1. Metode Matriks
2. Metode Cramer
3. Metode TBE

1. Metode Matriks

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{11}x_1 = b_2}$$

.

.

.

$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots.. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots.. & \ldots.. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots.. \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{bmatrix}$$

$A\,X = B$

$A^{-1}A\,X = A^{-1}\mathrm{B}$

$\mathrm{I}\ \ \mathrm{X} = A^{-1}\ \mathrm{B}$

$\mathbf{X} = \boldsymbol{A^{-1}}\ \mathrm{B}$

Contoh Soal

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

Jawaban : x1 = 1; x2 = 4; x3 = 4

Penyelesaian

SPL diubah dulu menjadi perkalian 2 matriks, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dimana :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\ \mathrm{B}$$

Sehingga , langkah awal adalah mencari A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj\ (A)$$

mencari $\det(A)$, *dapat lakukan dengan metode Sarrus* :
$\det(A) =$ -3

mencari $\mathrm{Adj}(A)$ *dilakukan dengan cara* :
1. *Cari matriks kofaktor dari matriks A*

$C_{11} = M_{11} = -1$	$C_{12} = -M_{12} = 0$	$C_{13} = M_{13} = 1$
$C_{21} = -M_{21} = -1$	$C_{22} = M_{22} = -3$	$C_{23} = M_{23} = -5$
$C_{31} = M_{31} = 0$	$C_{32} = -M_{32} = -3$	$C_{33} = M_{33} = -3$

$$C_A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$Adj\ (A) = (CA)^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj\ (A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-3)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Sehingga :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\ \mathrm{B}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{(-3)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.Metode Cramer

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \qquad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \qquad X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m1}} & \dots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{b_1} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{b_2} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{b_m} & \dots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ b_2 & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_m & \boldsymbol{a_{m1}} & \dots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{vmatrix}$$

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \dots & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \dots & \boldsymbol{b_2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m1}} & \dots & \boldsymbol{b_{mn}} \end{vmatrix}$$

Contoh Soal

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

Carilah nilai x_1, x_2, x_3 ...!

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2\text{-}1\text{-}2)\text{-}(\text{-}1\text{+}4\text{-}1)\text{=-}3$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (2\text{+}3\text{+-}2)\text{-}(3\text{+}4\text{-}1) = \text{-}3$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (\text{-}2\text{-}2\text{-}3)\text{-}(1\text{+}6\text{-}2)\text{= -}12$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (\text{-}6\text{-}1\text{+}4)\text{-}(2\text{+}4\text{+}3) = \text{-}12$$

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$X_2 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-12}{-3} = 4$$

3. Metode Transformasi Baris Elementer (TBE)

$$(A \mid B) \xrightarrow{TBE} (I \mid X)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & b_m \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & x_n \end{array}\right]$$

Contoh Soal

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Carilah nilai x_1, x_2, x_3 ...!

$$(A \mid B) \xrightarrow{TBE} (I \mid X)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = R_2 + (-2)R_1]{R_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 = R_3 + (1)R_1]{R_{31}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 = R_1 + (1)R_2]{R_{12}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 = R_3 + (-1)R_2]{R_{32}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = R_2 + (1)R_3]{R_{23}(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow$$

X1 = 1
x2 =4
x3 = 4

Menyelesaikan yang jumlah persamaanya tidak sama dengan dengan jumlah variabelnya

Ada dua kemungkinan

1. Jumlah persamaan > jumlah variabel (m>n)
2. Jumlah persamaan < jumlah variabel (m<n)

Dalam penyelesaian ini hanya bisa dilakukan dengan metode TBE (Transformasi Baris Elementer)
Penyelesaian akan selesai/berhenti jika metode TBE tidak bisa dilakukan lagi dan matriksnya mengandung sebanyak-banyaknya elemen nol.

Contoh Soal

$$
\begin{aligned}
a \quad + \quad c &= 4 \\
a \quad - \quad b &= -1 \\
2b + c &= 7
\end{aligned}
$$

Penyelesaian Tunggal

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

Terlihat bahwa solusi SPL adalah

$a = 1,\ b = 2,\ dan\ c = 3$

PENYELESAIAN TAK BERHINGGA

$$a + c = 4$$
$$a - b = -1$$
$$-a + b = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jika dikembalikan kedalam bentuk perkalian matriks diperoleh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ini memberikan $a + c = 4$ dan $b + c = 5$.

Dengan memilih $c = t$, dimana t adalah parameter.

Maka solusi SPL tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$ dimana t adalah parameter

Jadi, SPL tersebut memiliki solusi banyak.

$$a + c = 4$$
$$a - b = -1$$
$$-a + b = 2$$

Tidak Memiliki Penyelesaian

c. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Terlihat bahwa ada baris nol pada matriks koefisien tetapi matriks konstanta pada baris ke-3 sama dengan 1 (tak nol)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dari baris ke-3 diperoleh hubungan bahwa

$$0.a + 0.b = 1.$$

Tak ada nilai a dan b yang memenuhi kesamaan ini.

Jadi, SPL tersebut tidak memiliki solusi.

Latihan Soal

- Diketahui SPL
- $x + 2y - 3z = 4$
- $3x - y + 5z = 2$
- $4x + 2y - (a^2 - 14)z = a + 2$

Tentukan a sehingga SPL

a. Mempunyai solusi tunggal
b. Tidak mempunyai solusi
c. Solusi yang tidak berhingga

Solusi Tunggal

Matriks diperbesar dari SPL adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & a-14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{a^2-16} & a-4 \end{array}\right)$$

a. Agar SPL mempunyai solusi tunggal:

$a^2 - 16 \neq 0$ sehingga $a \neq \pm 4$

b. Tidak Punya Solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & (a^2-16) & a-4 \end{array}\right]$$

$a^2 - 16 = 0 \rightarrow a = \pm 4$ → a = 4 dan a = -4
Dan $a - 4 \neq 0$ → $a \neq 4$
jadi a yang memenuhi adalah a = -4

c. Soulsi Tidak Hingga Banyak

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & (a^2-16) & a-4 \end{array}\right]$$

$a^2 - 16 = 0 \rightarrow a = \pm 4$ → a = 4 dan a = -4
Dan $a - 4 = 0$ → $a = 4$