Matriks dan Transformasi Linier

S1 Sistem Komputer
Musayyanah,S.ST., MT

Kita adalah apa yang kita kerjakan berulang-ulang. Karena itu, keunggulan bukanlah suatu perbuatan, melainkan sebuah kebiasaan.

Aristoteles

List of Content

- Menentukan nilai determinan matrik ordo 2x2
- Menentukan nilai determinan matrik ordo 3x3 dengan aturan Sarrus
- Menentukan nilai determinan matrik ordo nxn
  - ✓ Dengan matriks kofaktor
  - ✓ Dengan Transformasi Baris Elementer

Pengertian Determinan

- Determinan : setiap matriks persegi yang memiliki elemen-elemen bilangan real, terdapat satu nilai yang berhubungan dengan matriks tersebut. Satu nilai real ini disebut determinan.
- Simbol determinan dari **A**→ $|A|$ atau det(A)
- Contoh : $\boldsymbol{B}_{2x2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$
- det(**B**) = $|\boldsymbol{B}|$ = $b_{11}b_{22}$ - $b_{12}b_{21}$

Aturan Sarrus → Determinan Matriks 3x3

$$C_{3x3} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Det(C) = $|C|$

$$C_{3x3} = \left[\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{matrix} =$$

$$c_{11}c_{22}c_{33}+c_{12}c_{23}c_{31}+c_{13}c_{21}c_{32}-c_{13}c_{22}c_{31}-c_{11}c_{23}c_{32}-c_{12}c_{21}c_{33}$$

Sifat-Sifat Determinant

1. Jika matriks A mengandung satu baris/kolom yang ***semua elemenya nol***

det(A) = 0

Ex :

- $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka det($C$) = 0

- $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka det($D$) = 0

2. Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Contoh :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}, maka \det(A) = 26$$

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}, maka \det(\boldsymbol{A^T}) = 26$$

- Jika setiap elemen dari suatu baris atau kolom pada determinan dari matrisk A dikalikan dengan suatu scalar k, maka k bisa dikeluarkan dari tanda determinan →

Det(kA) = k.det(A)

- Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$, maka det(A) = 26

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 1.3 & 4.3 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$, maka det(A) = 78

Det(X) = 3.det(A) = 3.26 = 78

- Jika matriks B diperoleh dari matriks A dengan cara mempertukar dua baris atau dua kolom, maka :

det (B) = -det(A)

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, maka det(A) =72

$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, maka det(B) =-72

- Jika dua bris atau kolom **matriks A identik**, maka

det(A) = 0

- Ex $$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}5\\9\\4\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\8\\-1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}10\\18\\8\end{matrix}} \end{bmatrix}, \det(A) = 0$$

Baris ke 1 = 2baris ke 3

- Jika A dan B dua matriks bujur sangkar yang mempunyai ukuran sama, maka :

det (AB) = det(A) det(B)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 2 & 8 & 9 \\ 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, maka det(A) =-137

$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 10 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, maka det(B) =-119

$A.B = \begin{bmatrix} 82 & 45 & 131 \\ 93 & 50 & 138 \\ -16 & 19 & 66 \end{bmatrix}$ = det(AB) = 16303

=

det(A)det(B) = (-137)(-119) = 16303

Menentukan Determinan dengan Metode Kofaktor

- Definisi Metode Kofaktor

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka **minor anggota** a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan sub-matrik yang masih tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan disebut **kofaktor anggota $\boldsymbol{a_{ij}}$** .

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Minor anggota a_{11} adalah

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

$$kofaktor\ \ a_{11} = C_{11} = (-1)^{1+1}\ M_{11} = 16$$

- Cara cepat untuk menghubungkan kofaktor (C_{11}) dan minor (M_{11}) $\rightarrow$ 'papan periksa'
- $\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots . \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots .. \end{bmatrix}$
- Misalnya C_{11} = M_{11}, C_{21} = -M_{21}, C_{12} = -M_{12}, C_{22} = M_{22} dan sebagainya

Determinan dari suatu matriks = jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris atau kolom dengan kofaktor – kofaktornya

$$|M \quad | = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ M_{ij} = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} + \dots + a_{in}M_{in}$$

Menentukan determinan matriks nxn dengan TBE (Transformasi Baris Elementary)

- Menukarkan dua baris

  Notas : b_{ij} --(menukarkan baris ke –i dengan baris ke -j).

- Mengalikan suatu barus dengan scalar k, k$\neq 0$

  Notasi = k.b_i -- (mengalikan setiap elemen dari baris ke- i, dengan skalar k, k$\neq 0$).

- Menambahkan baris ke-i dengan k kali baris ke-j (k$\neq 0$)

  Notasi = b_{ij} (k)

Arti : b_i+ k.b_j (Perubahan terjadi pada b_i)

- Dengan Menggunakan TBE, ubahlah matriks yang ada, menjadi matriks Segitiga Atas/Segitiga Bawah
- Harga determinanya adalah perkalian antar elemen-elemen pada diagonal utamanya

Contoh Soal

Tentukan determinant matris B dengan metode TBE

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

"Bila kau tak tahan lelahnya belajar, maka kau harus tahan menanggung perihnya kebodohan"

(Imam Syafi'i)

Latihan Soal

- Tentukan nilai determinan berikut dengan cara Sarrus, kofaktor dan TBE

- Untuk NIM GASAL

$$\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

- Untuk NIM GENAP

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -8 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

thank you
danke
рахмат
謝謝
ngiyabonga
teşekkür ederim
spas
Баярлалаа
mersi
kia ora
barka
welalin
tack
mahalo
tapadh leat
спасибо
faafetai lava
vinaka
blagodaram
dank je
misaotra
paldies
grazzi
matondo
gracias
хвала
спасибі
kiitos
dankie
nanni
nandri
dhanyavad
mauruuru
köszönöm
aciu
asante
manana
obrigada
tenki
bedankt
bayarlalaa
gràcie
hvala
dankon
akun
djiere dieuf
tau
mochchakkeram
murakoze
enkosi
dziękuję
дякую
mamnun
chokrane
chnorakaloutioun
gratias ago
gràcies
sulpáy
go raibh maith agat
sobodi
dėkuji
sagolun
sukriya
kop khun krap
taiku
obrigado
mèsi
madloba
arigatô
takk
dakujem
trugarez
ありがとう
tanemirt
grazie
najis tuke
terima kasih
rahmet
didi
kam sah hamnida
rahmat
diolch
dhanyavadagalu
shukriya
mercè
мерси
ευχαριστώ
xièxie
তোমাকে ধন্যবাদ
감사합니다
merci